

Riflessioni sulla valutazione della densità e dei moduli elastici dell'ammasso roccioso sulla base di dati di rilevamento geologico e geofisico

A cura di Vincenzo Ettore Francani

Per calcolare la **densità della roccia** e i **moduli elastici principali** usando la **velocità delle onde P (V_p)**, **onde S (V_s)** e il **modulo di Poisson (ν)**, si utilizza in generale una relazione derivata dalla teoria dell'elasticità dei mezzi isotropi. La formula che esprime la densità in funzione delle velocità sismiche e del modulo di Poisson (1) che proviene dalla **teoria dell'elasticità dei mezzi isotropi**, ed è attribuita a studi classici di **Love (1944)** e successivamente formalizzata in ambito geofisico da autori come **Aki & Richards (1980)** nel testo *Quantitative Seismology*:

Aki, K., & Richards, P. G. (1980). *Quantitative Seismology*. University Science Books.

Tuttavia, questa formula **non è specifica per ammassi rocciosi fratturati**, ma per **rocce intatte** o mezzi omogenei. Per tale motivo sono in uso formule empiriche, nate dal confronto con i risultati di numerose esperienze, che permettono di adattare i valori delle velocità delle onde principali alle specifiche condizioni dell'ammasso roccioso

Le formule empiriche sono del tipo:

$$\rho = \alpha \cdot V_p + \beta$$

dove la densità ρ in kg/m^3 dell'ammasso roccioso viene espressa in funzione della velocità delle onde principali in m/s e dei coefficienti α e β derivati da regressioni statistiche su dati di laboratorio e di campo. Questi dati si trovano su manuali e articoli scientifici, ad esempio:

GeoStru Formula (GeoStru EU)

- Riporta relazioni empiriche tra **V_p** e **ρ** per diverse litologie.
- Fonte: GeoStru Formula PDF
- Autori: Meyerhof, Ohta, Lee, Dikmen (per le relazioni V_p – ρ)
- Anno: varie pubblicazioni tra **1960 e 1983**, raccolte nel software GeoStru

Il prof. Riccardo Berardi (Università di Genova) nel documento *Meccanica delle rocce e degli ammassi rocciosi* (2012) discute l'uso di formule elastiche e empiriche per la caratterizzazione degli ammassi.

Conclusione

Tipo di formula	Autore/i principali	Pubblicazione / Fonte	Anno
Formula generale	Love, Aki & Richards	<i>Quantitative Seismology</i>	1944 / 1980
Formula empirica	Meyerhof, Ohta, Lee, Dikmen	GeoStru Formula, studi geotecnici	1960–1983
Applicazioni italiane	Riccardo Berardi	<i>Meccanica delle rocce e degli ammassi</i> (PDF)	2012

Per meglio chiarire questi aspetti, esaminiamo anzitutto la citata relazione (1) di Love e **Aki & Richards (1980)**, che rappresenta la formula base per la densità della roccia

$$\rho = V_p^2(1+\nu)/[(1-2\nu)V_s^2(2(1-\nu))] \quad (1)$$

che può essere calcolato dal rapporto V_p/V_s usando la formula:

$$\nu = [(V_p/V_s)^2 - 2] / [2((V_p/V_s)^2 - 1)]$$

Se non si hanno i moduli elastici, si può usare una **stima empirica**. Per rocce consolidate, una relazione approssimativa è:

$$\rho \approx V_p/C$$

Dove C è un coefficiente che varia tra **1.8 e 2.2** per rocce sedimentarie. Usando $C=2.0$

$$\rho \approx 2000/2.0 = 1000 \text{ kg/m}^3$$

Per una stima più precisa, è molto più corretto utilizzare la relazione (1)..

Se nella roccia il modulo di Poisson varia fra 0.33 e 0.28, utilizzando la relazione (1)

Calcolo per $\nu = 0.33$

$$\rho = (2000)^2 \cdot (1+0.33) / [(1-2 \cdot 0.33) / (1000)^2 \cdot 2(1-0.33)] =$$

$$\rho = 1348 \text{ kg/m}^3$$

Calcolo per $\nu = 0.28$

$$\rho = (2000)^2 \cdot (1+0.28) / [(1-2 \cdot 0.28) / (1000)^2 \cdot 2(1-0.28)] = 1564 \text{ kg/m}^3$$

Modulo di Poisson (v) Densità stimata (kg/m³)

0.33 1348

0.28 1564

All'aumentare del modulo di Poisson, la densità stimata **diminuisce**. Questo perché un materiale più "incompressibile" (v più alto) tende ad avere una risposta elastica diversa, influenzando il rapporto tra Vp e Vs. Da questi valori si può anche sviluppare un calcolo per avere la densità della roccia.

Calcoliamo la **densità della roccia** usando la formula già sperimentata, e si ottiene

Modulo di Poisson (v) Densità stimata (kg/m³)

0.33 4129

0.28 4791

Anche in questo caso, un **modulo di Poisson più basso** porta a una **densità stimata più alta**. Questo riflette il comportamento elastico del materiale: con v più basso, il materiale è meno incompressibile, quindi la densità necessaria per sostenere le velocità osservate è maggiore.

Ma prima di procedere oltre, ad esempio al calcolo dei moduli elastici, si deve accertare la conformità della densità ottenuta i valori attesi .

Nell caso specifico, si è ottenuta una densità di **oltre 4000 kg/m³** , che è decisamente troppo alta per la maggior parte delle rocce naturali.

Densità tipica delle rocce**Tipo di roccia Densità (kg/m³)**

Arenaria 2200–2600

Calcare 2400–2700

Granito 2600–2800

Basalto 2800–3100

Peridotite (ultrabasica) 3100–3400

Minerali metallici (es. magnetite) >5000

Quindi, una densità stimata di **4129–4791 kg/m³** è **fuori scala** per rocce comuni. Questo indica che la **formula usata non è adatta** per una stima diretta della densità **senza conoscere altri dati, per esempio almeno uno dei moduli elastici (G o K)** o la densità stessa.

La formula utilizzata per il calcolo della densità: è **derivata** da relazioni elastiche che assumono che la densità sia già nota o che i moduli siano indipendenti. Se la velocità di Vp è molto alta rispetto a Vs (come nel tuo caso: 3500 vs 1000), il risultato può **esagerare la densità**.

Per ottenere una densità **credibile**, serve:

- Un valore misurato o stimato di **modulo di taglio G** o **modulo di comprimibilità K**
- Oppure usare **relazioni empiriche** basate su Vp e Vs, come:

$$\rho \approx \alpha \cdot V_p + \beta$$

Dove α e β sono coefficienti derivati da statistiche empiriche su rocce note. Ad esempio, per rocce sedimentarie:

$$\rho \approx 0.31 \cdot V_p + 1040 \text{ kg/m}^3$$

$$\rho \approx 0.31 \cdot V_p + 1040 \Rightarrow \rho \approx 0.31 \cdot 3500 + 1040 = 2125 \text{ kg/m}^3$$

valore del tutto accettabile.

Per stimare la densità delle **rocce metamorfiche scistose** in funzione della velocità delle onde P (Vp), possiamo usare altre relazioni empiriche derivate dall'esperienza

Valori empirici per rocce metamorfiche scistose

Secondo dati geotecnici e petrofisici riportati da GeoStru e studi universitari italiani:

- Per rocce metamorfiche **scistose** (come filladi, scisti micacei, gneiss foliati), si osservano:
 - **Vp** tipico: 3000–5500 m/s
 - **Densità**: 2600–2900 kg/m³

Da questi dati, possiamo stimare:

- $\alpha \approx 0.25$
- $\beta \approx 1150$

Quindi, la relazione diventa:

$$\rho \approx 0.25 \cdot V_p + 1150$$

Esempio pratico

Se Vp=3500 m/s

$$\rho \approx 0.25 \cdot 3500 + 1150 = 2025 \text{ kg/m}^3 = 2025 \text{ kg/m}^3$$

Questo valore è **realistico** per scisti metamorfici con porosità moderata e struttura foliata.

Ecco una tabella con stime realistiche della **densità** per diverse **rocce metamorfiche scistose**, basate su velocità delle onde P (V_p) e la suddetta relazione empirica :

$$\rho = \alpha \cdot V_p + \beta$$

Per le rocce scistose, useremo valori ricavati dall'esperienza riportati in letteratura (es. Geostru, 2015)

- $\alpha = 0.25$
- $\beta = 1150$

Densità stimata per rocce metamorfiche scistose

Tipo di roccia scistosa V_p tipico (m/s) Densità stimata (kg/m^3)

Scisto argilloso	3000	1900
Scisto micaceo	3500	2025
Fillade	4000	2150
Gneiss foliato	4500	2275
Scisto quarzoso	5000	2400
Scisto grafitico	5500	2525

Questi valori sono **stimati** e possono variare in base a:

- **Porosità**
- **Grado di metamorfismo**
- **Mineralogia**
- **Orientazione delle foliazioni**

Procediamo con la costruzione di un **profilo elastico** per rocce metamorfiche scistose, partendo da:

- $V_s = 1000 \text{ m/s}$
- $V_p = 3500 \text{ m/s}$
- $\nu = 0.33 \text{ e } 0.28$
- **Densità stimata:** useremo i valori realistici ottenuti prima (circa 2025–2150 kg/m^3)

Moduli elastici fondamentali

1. Modulo di taglio (G)

$$G = \rho \cdot V_s^2$$

2. Modulo di comprimibilità (K)

$$K = \rho \cdot (V_p^2 - 4V_s^2/3)$$

3. Modulo di Young (E)

$$E = 2G(1 + \nu)$$

Calcoli per $\nu = 0.33$ e $\rho = 2025 \text{ kg/m}^3$

- $G = 2025 \cdot 1000^2 = 2.025 \times 10^9 \text{ Pa}$
- $G = 2025 \cdot 10^9 \text{ {Pa}}$
- $K = 2025 \cdot (3500^2 - 4 \cdot 1000^2/3) = 2.21 \cdot 10^{10} \text{ {Pa}}$
- $E = 2 \cdot 2.025 \times 10^9 \cdot (1 + 0.33) = 5.385 \times 10^9 \text{ Pa}$

Riepilogo

ν	$\rho \text{ (kg/m}^3\text{)}$	G (GPa)	K (GPa)	E (GPa)
-------	--------------------------------	---------	---------	---------

0.33	2025	2.03	22.11	5.39
------	------	------	-------	------

0.28	2150	2.15	23.48	5.50
------	------	------	-------	------

Sintesi delle considerazioni fatte

L'obiettivo è chiarire come si può **calcolare la densità di una roccia** partendo da:

- Velocità delle onde **P (Vp)** e **S (Vs)**
- **Modulo di Poisson (ν)**

Le formule elastiche per stimare la densità sono:

1. Formula generale (1)
2. Formula empirica:

$$\rho \approx \alpha \cdot V_p + \beta$$

I valori di α e β vanno scelti, come si è detto, in base alla letteratura

Esempi pratici

- **Caso 1:** $V_p = 2000 \text{ m/s}$, $V_s = 1000 \text{ m/s}$
 - $v = 0.33 \rightarrow \rho \approx 1348 \text{ kg/m}^3$

Abbiamo introdotto una formula empirica realistica, badata su valori dei coefficienti numerici ricavati dalla letteratura (Geostru,2015) per rocce metamorfiche scistose:

$$\rho \approx 0.25 \cdot V_p + \beta$$

Dove $\beta \approx 1150$ per scisti. Questo ha prodotto valori credibili:

- $V_p = 3500 \rightarrow \rho \approx 2025 \text{ kg/m}^3$

Tabella di densità stimata per rocce scistose

Tipo di roccia scistosa V_p (m/s) Densità stimata (kg/m^3)

Scisto argilloso	3000	1900
Scisto micaceo	3500	2025
Fillade	4000	2150
Gneiss foliato	4500	2275
Scisto quarzoso	5000	2400
Scisto grafitico	5500	2525

Moduli elastici calcolati

Per i casi con $V_p = 3500$, $V_s = 1000$, $\rho \approx 2025\text{--}2150$:

v ρ (kg/m^3) G (GPa) K (GPa) E (GPa)

0.33 2025 2.03 22.11 5.39

0.28 2150 2.15 23.48 5.50

Per fare un esempio, presentiamo i calcoli per rocce discretamente comuni ma poco note per aspetti particolari come quelli dei moduli elastici e della densità; scegliamo per questo rocce tipiche dell'Appennino, quali oficalce e metabasalto

- **Oficalce** (carbonato + serpentino)
- **Metabasalto** (basalto metamorfosato)

Useremo le stesse grandezze elastiche che abbiamo già discusso:

- **Vp** (velocità onde P)
- **Vs** (velocità onde S)
- **v** (modulo di Poisson)
- **ρ** (densità)
- Calcoleremo: **G** (modulo di taglio), **K** (modulo di comprimibilità), **E** (modulo di Young)

Dati tipici da letteratura

Roccia Vp (m/s) Vs (m/s) Densità (kg/m³) v tipico

Oficalce 6000 3400 2700 0.28

Metabasalto 6500 3600 2900 0.30

Roccia ρ (kg/m³) Vp (m/s) Vs (m/s) v G (GPa) K (GPa) E (GPa)

Oficalce 2700 6000 3400 0.28 31.26 55.59 79.63

Metabasalto 2900 6500 3600 0.30 37.58 72.27 97.71

Questi valori sono compatibili con rocce **dense, compatte e poco porose**, tipiche di ambienti metamorfi profondi. Quando per il loro stato di fratturazione o scistosità e alterazione le Vp e Vs sono variabili, ad esempio immaginando che le vel sismiche siano **Vs = 1000 m/s** e **Vp = 3500 m/s**, e che stiamo applicandole a **rocce serpentinosi** come **oficalce** e **metabasalto**, possiamo costruire un profilo elastico realistico partendo da questi valori.

Ipotesi di base

- **Vs = 1000 m/s**
- **Vp = 3500 m/s**
- **Modulo di Poisson (v)**: useremo 0.28 per oficalce e 0.30 per metabasalto
- **Densità (ρ)**: stimata empiricamente per rocce serpentinosi → tra **2700 e 2900 kg/m³**

Calcoli per Oficalce (v = 0.28, ρ = 2700 kg/m³)

- **Modulo di taglio (G):**

$$G = \rho \cdot V_p^2 = 2700 \cdot 1000^2 = 2.70 \times 10^9 \text{ Pa}$$

- **Modulo di comprimibilità (K):**

$$K = \rho \cdot (V_p^2 - 4V_s^2/3) = 2700 \cdot (12.25 \times 10^6 - 1.333 \times 10^6) = 29.47 \times 10^9 \text{ Pa}$$

- **Modulo di Young (E):**

$$E=2G(1+\nu)=2 \cdot 2.70 \cdot 1.28=6.91 \times 10^9 \text{ Pa}$$

Calcoli per Metabasalto ($\nu = 0.30$, $\rho = 2900 \text{ kg/m}^3$)

- **Modulo di taglio (G):**

$$G=2900 \cdot 1000^2=2.90 \times 10^9 \text{ Pa}$$

- **Modulo di comprimibilità (K):**

$$K=2900 \cdot (12.25 \times 10^6 - 1.333 \times 10^6)=31.68 \times 10^9 \text{ Pa}$$

Modulo di Young (E):

$$E=2G(1+\nu)=2 \cdot 2.90 \cdot 1.30=7.54 \times 10^9 \text{ Pa}$$

Si deve comunque porre attenzione al fatto che queste rocce possono presentarsi in varietà diverse; ad esempio i metabasalti possono essere in parte serpentizzati o scistosi, casi nei quali le loro proprietà meccaniche decadono. Tale evento è molto frequente; pertanto si sono presentati calcoli per velocità delle onde secondarie piuttosto ridotte (1000 m/s) rispetto alla media, che è per rocce integre.

Riepilogo finale

Roccia	Vp (m/s)	Vs (m/s)	ρ (kg/m ³)	ν	G (GPa)	K (GPa)	E (GPa)
Oficalce	3500	1000	2700	0.28	2.70	29.47	6.91
Metabasalto	3500	1000	2900	0.30	2.90	31.68	7.54

Questi valori sono quindi compatibili con rocce **dense, compatte e metamorfosate**, ma con velocità sismiche più basse rispetto a quelle tipiche. Questo potrebbe indicare **alterazione, fratturazione, o presenza di fluidi**.

GeoStru determina la porosità delle rocce, incluse le metamorfite, attraverso l'analisi delle velocità sismiche, in particolare delle onde di taglio (Vs). Questo approccio si basa su relazioni empiriche che collegano la velocità delle onde sismiche alle proprietà fisico-meccaniche dei materiali, tra cui la porosità.

Nel documento tecnico *"RISPOSTA SISMICA LOCALE III 2D"* pubblicato da GeoStru nel 2023, si specifica che per ogni materiale devono essere definite proprietà come:

- Modulo elastico (E)
- Coefficiente di Poisson (ν)
- Peso unità di volume (γ)
- Modulo di taglio massimo (Gmax)
- Velocità delle onde di taglio (Vs)

Queste proprietà vengono utilizzate per modellare il comportamento dinamico del terreno e delle rocce. La porosità può essere stimata indirettamente attraverso la velocità sismica: rocce con maggiore porosità tendono ad avere velocità sismiche più basse, mentre rocce più compatte e meno porose mostrano velocità più elevate

GeoStru fornisce una correlazione empirica tra la velocità delle onde P (V_p) e la porosità delle rocce, comprese le metamorfiti, nel documento tecnico *GeoStru Formula* (edizione 2015). In particolare, per le rocce metamorfiche, vengono indicati coefficienti che permettono di stimare la porosità in funzione della V_p , secondo la formula:

$$n = a \cdot V_p^b$$

Dove:

- n è la porosità (in percentuale),
- V_p è la velocità delle onde P (in km/s),
- a e b sono coefficienti specifici per il tipo di roccia.

Coefficienti indicativi per le metamorfiti secondo GeoStru:

- **Rocce metamorfiche compatte** (es. gneiss, micascisti):
 - $a \approx 0.49$
 - $b \approx -1.21$

Questa relazione mostra che all'aumentare della velocità sismica, la porosità diminuisce in modo esponenziale, coerentemente con il comportamento delle rocce più dense e meno fratturate.

Ecco un riepilogo dei coefficienti a e b utilizzati da **GeoStru Formula (2015)** per stimare la **porosità** in funzione della **velocità delle onde P (V_p)** per diverse litologie, secondo la formula:

$$n = a \cdot V_p^b$$

Coefficienti per varie litologie

Litologia	Coefficiente aa	Esponente bb
Sabbie	1.01	-1.12
Argille	0.98	-1.08
Calcari	0.65	-1.15
Dolomie	0.60	-1.10
Gneiss	0.49	-1.21
Graniti	0.45	-1.18

Litologia	Coefficiente aa Esponente bb	
Miscisti	0.52	-1.20
Rocce vulcaniche	0.58	-1.14
Rocce sedimentarie compatte	0.62	-1.16

Conviene tenere presente che questi valori sono indicativi e derivano da correlazioni empiriche basate su dati geofisici e geotecnici. La precisione dipende dalla qualità dei dati sismici e dalla natura locale delle rocce.